

Fiche 5

Systèmes d'équations linéaires

Objectif : A la fin de ce cours, l'apprenant devra être capable de résoudre un problème faisant intervenir un système d'équations linéaires ayant un faible nombre d'inconnues.

Sommaire

5.1	Exemple introductif	43
5.2	Généralités	44
5.2.1	Définitions	44
5.2.2	Ecriture matricielle d'un système d'équations linéaires . .	45
5.2.3	Résolution et nombre de solutions	45
5.3	Méthodes de résolution	46
5.3.1	Résolution par inversion matricielle	46
5.3.2	Méthode de Cramer	46
5.3.3	Méthode de Gauss	47
5.3.4	Récapitulatif sur les méthodes	50
5.4	Exercices de travaux dirigés	51

5.1 Exemple introductif

Des oiseaux, fatigués d'une longue migration, se reposent sur les branches hautes et basses d'un arbre. Un oiseau d'une branche du haut qui avait le sens de l'observation et de bonnes capacités d'arithmétique cria à l'un placé sur une branche du bas :

- Si je viens te rejoindre nous serons autant en haut qu'en bas
- mais si c'est toi qui viens alors nous serons deux fois plus nombreux qu'en bas.

Combien d'oiseaux y a-t-il sur les branches hautes et basses de l'arbre ?

►►► *Indications* : Soient x le nombre d'oiseaux en haut et y le nombre d'oiseaux en bas. Il nous faut traduire les deux affirmations sous forme d'équations mathématiques.

- Si un oiseau du haut vient rejoindre ceux d'en bas, il y aura alors $x - 1$ oiseaux en haut et $y + 1$ oiseaux en bas et donc l'expression « nous serons autant en haut qu'en bas » se traduit par :

$$x - 1 = y + 1 \quad \text{soit} \quad x - y = 2.$$

- Si un oiseau du bas vient rejoindre ceux d'en haut, alors il y aura alors $x + 1$ oiseaux en haut et $y - 1$ oiseaux en bas et donc l'expression « nous serons deux fois plus nombreux qu'en bas » se traduit par :

$$x + 1 = 2(y - 1) \quad \text{soit} \quad x - 2y = -3.$$

On obtient donc un système d'équations :

$$\begin{cases} x - y &= 2 \\ x - 2y &= -3 \end{cases}$$

En faisant la différence entre la première et la deuxième lignes, on obtient $y = 5$. En remplaçant dans la première équation, on en déduit que $x = 7$. En conclusion, il y a 7 oiseaux en haut et 5 oiseaux en bas. $\diamond$

5.2 Généralités

5.2.1 Définitions

Définition 5.1

- On appelle **équation linéaire** de variables (ou inconnues) $x_1, \dots, x_p$, toute relation de la forme

$$a_1x_1 + \dots + a_px_p = b$$

où $a_1, \dots, a_p$ et b sont des nombres réels.

- Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, on appelle *système linéaire* de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ tout système du type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad (5.1)$$

avec a_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$, des nombres appelés *coefficients* du système et $b_1, \dots, b_n$ des nombres dont l'ensemble constitue le *second membre* du système.

- Lorsque le second membre est nul, le système est dit **homogène**.

5.2.2 Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires

On peut réécrire le système (5.1) sous la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

soit encore

$$AX = B.$$

La matrice A est appelée matrice du système (5.1), B le second membre et X est l'inconnue (ou le vecteur des inconnues).

Exemple 5.1 L'écriture matricielle du système

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

5.2.3 Résolution et nombre de solutions

Résoudre le système $AX = B$ revient à trouver l'ensemble de ses *solutions*, c'est-à-dire l'ensemble des X pour lesquels cette relation matricielle est vérifiée.

Voici un résultat **fondamental** pour les systèmes linéaires.

Théorème 5.1 *Il existe seulement trois cas pour le nombre de solutions d'un système d'équations linéaires :*

- soit le système n'a aucune solution,
- soit il a une unique solution,
- soit il a une infinité de solutions.

Exemple 5.2

- Le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ n'a pas de solution.
- Le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ a une unique solution qui est $(2, 1)$.
- Le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ a une infinité de couples solutions de la forme $(x, 3 - x)$, où $x \in \mathbb{R}$ (la deuxième équation n'apporte aucune nouvelle information sur les inconnues).

5.3 Méthodes de résolution

5.3.1 Résolution par inversion matricielle

Considérons le système linéaire $AX = B$ où A est une *matrice carrée* (Nombre d'équations = Nombre d'inconnues) et *inversible*. Alors

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

soit

$$X = A^{-1}B. \quad (5.2)$$

Exemple 5.3 On considère dans $\mathbb{R}^3$, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= 9 \\ 3x + 2y + 5z &= 7 \end{cases} \quad (5.3)$$

L'écriture du système sous la forme matricielle $AX = B$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$\det(A) = -3 \neq 0$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^T = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -9 & -4 & 7 \\ -6 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 \\ 4 & 1 & -2 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le système admet une unique solution

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 \\ 4 & 1 & -2 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.3.2 Méthode de Cramer

- Un système linéaire $AX = B$ est dit *système de Cramer* si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- Un tel système admet une *unique solution* dont la $j^{\text{ème}}$ composante x_j est obtenue par :

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad (5.4)$$

où

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

est la matrice déduite de A en remplaçant la colonne j par le second membre B .

Exemple 5.4 Résolvons à nouveau le système (5.3), mais cette fois-ci par la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = 9 \\ 3x + 2y + 5z = 7 \end{cases}$$

On a $\det(A) = -3 \neq 0$ donc le système est de Cramer. Le vecteur solution a pour composantes :

$$x = \frac{-1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{-1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{-1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

soit

$$x = \frac{-1}{3} \times (-3), \quad y = \frac{-1}{3} \times 9, \quad z = \frac{-1}{3} \times (-6)$$

soit encore $(x, y, z) = (1, -3, 2)$.

Remarque 5.1 Si la matrice A du système est *carrée* mais non inversible (i.e. $\det(A) = 0$), alors le système peut ne posséder aucune solution ou peut posséder une infinité de solutions. Il est plus pratique d'utiliser la *méthode (du pivot) de Gauss* (présentée ci-après).

5.3.3 Méthode de Gauss

Pour commencer, on rappelle la notion d'opérations élémentaires.

Définition 5.2 On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système d'équations linéaires, une des trois opérations suivantes :

- Multiplication par un scalaire $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- Permutation de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Ajout à une ligne, d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Ces opérations transforment le système en un système équivalent (ayant les mêmes solutions).

Méthode (du pivot) de Gauss.

- Transformer le système en un système triangulaire supérieur par des opérations élémentaires successives sur les *lignes* (on peut combiner les op. élém.)
- Résoudre en commençant par la dernière des équations transformées

Exemple 5.5 Résolvons à nouveau le système (5.3), mais cette fois par la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = 9 \\ 3x + 2y + 5z = 7 \end{cases}$$

- On fait $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ -5y - 2z = 11 \\ -4y - z = 10 \end{cases}$$

- $L_3 \leftarrow 5L_3 - 4L_2$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ -5y - 2z = 11 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

- On trouve successivement $z = 2$, $y = -3$ et $x = 1$. La solution de l'équation est donc le vecteur $X = (1, -3, 2)$.

Exemple 5.6 (Méthode de Gauss (second exemple)) On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ -4x - 5y + z = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrons que le système ne peut être résolu ni par inversion ni par la méthode de Cramer. En effet, la matrice du système

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

est telle que $\det(A) = 0$ donc le système ne peut être résolu ni par inversion ni par la méthode de Cramer.

- 2) Résolution par la méthode de Gauss.

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -y - 3z = 0 \\ 3y + 9z = 0 \end{cases}$$

- $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 :$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- L'égalité $0 = 0$ obtenue à la troisième ligne nous indique que la troisième équation n'apporte aucune nouvelle information.
- On tire donc $y = -3z$ puis, en remplaçant dans la première ligne, $x - 6z + 2z = 0$ soit $x = 4z$.
- L'ensemble solution :

$$\mathcal{S} = \{(4z, -3z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 5.7 (Méthode de Gauss (troisième exemple)) On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x + 3y = -4 \\ -4x + 5y = 5 \end{cases}$$

- 1) Montrons que le système ne peut être résolu ni par inversion ni par la méthode de Cramer. La matrice du système

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

n'est pas carrée donc le système ne peut être résolu ni par inversion ni par la méthode de Cramer.

- 2) Résolution par la méthode de Gauss.

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 :$

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ -y = 2 \\ 13y = -7 \end{cases}$$

- $L_3 \leftarrow L_3 + 13L_2 :$

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ -y = 2 \\ 0 = 19 \end{cases}$$

- L'égalité $0 = 19$ n'a pas de sens. Elle nous indique que la troisième équation est en contradiction avec les deux premières.
- L'ensemble solution est donc vide :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

5.3.4 Récapitulatif sur les méthodes

Méthodes	Remarques
Inversion matricielle Cramer	• Nombre d'équations = Nombre d'inconnues • Nécessite que la matrice A du système soit inversible ($\det(A) \neq 0$) • Pas très pratique lorsque l'ordre de A dépasse 3
Gauss	• Aucune restriction • Très pratique indépendamment du nombre d'équations et du nombre d'inconnues